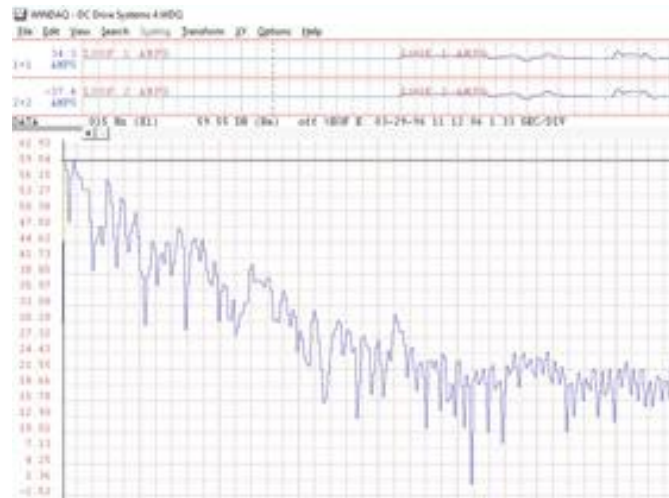
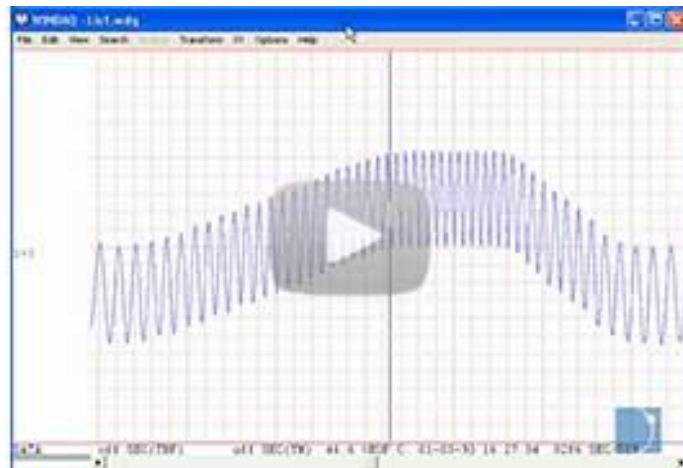


FFT (快速傅里叶变换) 波形分析



Calculate FFTs with WinDaq Waveform Browser

Available for free with every [DATAQ Instruments data acquisition device](#).



View the Advanced WWB Filters Video

FFT(快速傅里叶变换)计算并不复杂，只需要“听”。人耳会不由自主地自动计算，而这种计算能力是需要经过多年的数学学习才能培养出来的。声音是一种压力波，随着时间的推移在大气中传播，耳朵把声音转换为频谱，将其描述为具有不同音高的一系列音量。然后大脑将这些信息转化为可感知的声音。

可以使用数学方法对相同的声波或其他随时间变化的波动信号进行类似的转换。傅里叶变换是进行这种转换的数学工具。简单地说，傅里叶变换将时域中的波形数据转换到频域中。傅里叶变换将基于时间的原始波形分解为一系列正弦波，每个正弦波都具有独特的幅度、频率和相位。实际上，这个过程是将时域中难以用数学方式描述的波形转换为更易于处理的一系列正

弦函数，当这些函数叠加在一起时，可以准确地再现原始波形。绘制每个正弦波的幅值与频率的关系图会创建一个功率谱，它是频域中原始波形的响应。图 1 所示为时域到频域的转换。

傅里叶变换已经成为一个功能强大的分析工具，应用于各种科学领域。在某些情况下，傅里叶变换可以为电、热、光等动态响应复杂方程的求解提供一种简便方法。在其他情况下，傅里叶变换可以通过分析识别波动信号的规律，从而帮助我们理解天文学、医学和化学中观测到的各种现象。因为它的实用性，傅里叶变换已经广泛应用于个人计算机中。已经开发出的算法将个人计算机及其强大的计算能力与傅里叶变换联系起来，从而为频域中的波形数据表示提供了基于个人计算机的解决方案。但是应该在傅里叶分析软件中寻找什么？是什么让一个软件包在功能、灵活性和准确性方面优于另一个？本文将展示并解释此类软件包的一些基本原理，并试图揭开围绕这一强大分析工具的神秘面纱。

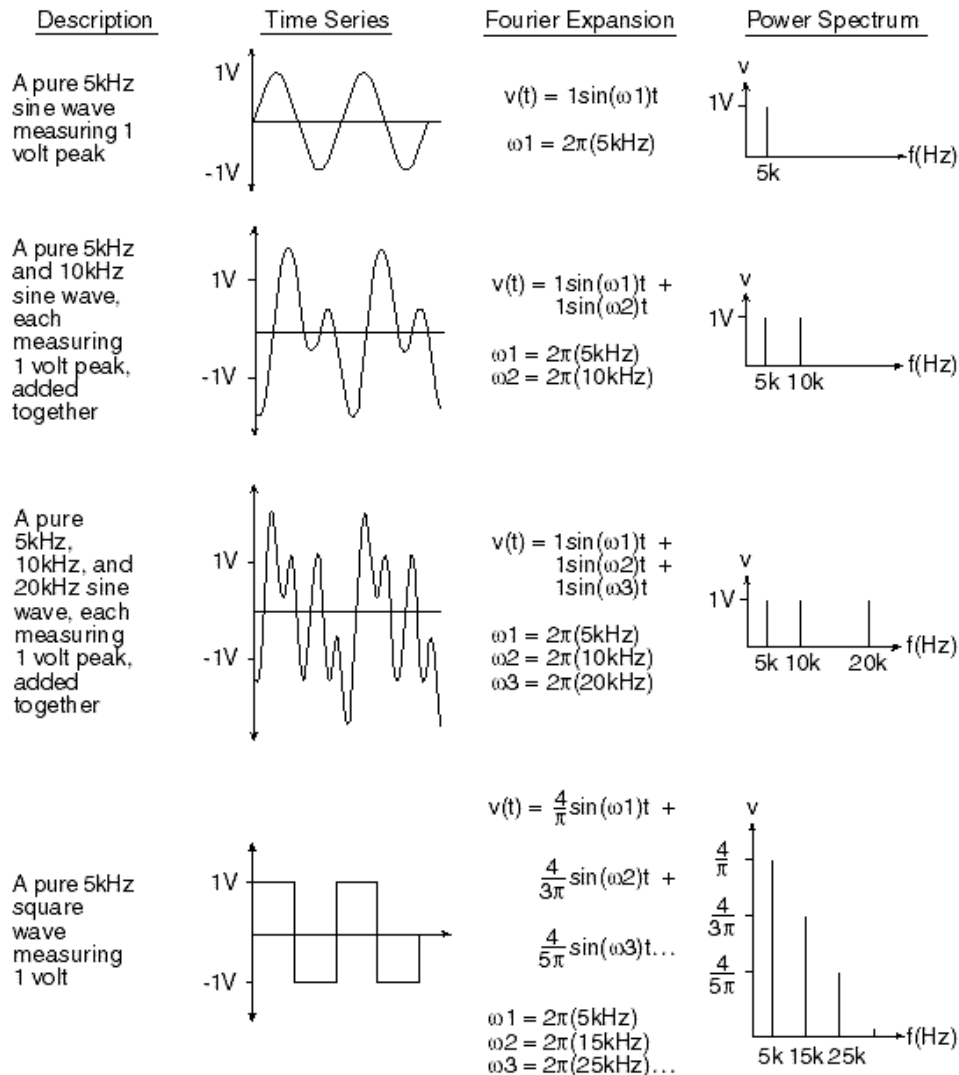


图 1 — 傅里叶变换图示

DATAQ 公司的 [WinDaq Waveform Browser\(WWB\)](#)回放软件包含了傅里叶变换算法，本文中介绍的所有图形和概念均来自于 WWB 傅里叶变换程序。

三种变换

在计算机出现之前，傅里叶变换的数值计算工作量巨大，大量的运算必须用纸和笔来完成。在计算机技术的支持下，傅里叶分析得到了充分的发展。1965 年 James W. Cooley 和 John W. tukey 提出了快速傅里叶变换算法。快速傅里叶变换(FFT)是利用计算机计算傅里叶变换的高效、快速的计算方法。FFT 的主要优点是速度快，因为它减少了分析波形所需的计算次数。FFT 的缺点之一是可转换的波形数据范围有限，因此需要使用加权函数，即加窗，以补偿频谱泄漏。

FFT 的一种替代方法是离散傅里叶变换(DFT)。DFT 允许精确定义转换计算的范围，无需加窗。但缺点是 DFT 在计算上比 FFT 慢。

时域到频域的变换是可逆的。一旦功率谱被前述所提到的两种变换中的一种显示出来，通过计算傅里叶逆变换(IFT)就可以重建原始信号为时域函数。后面将分别讨论不同情况下的每一种变换，并为市场上各种傅里叶分析软件包之间的比较提供一个标准。

利用 FFT 生成功率谱

FFT 是 DFT 的高效快速算法，FFT 比 DFT 运算量小得多，n 点的 FFT 需要做 $(n/2) \log_2(n)$ 次复数乘法运算，而 n 点的 DFT 需要做 n^2 次乘法运算。

例如，1024(2^{10})点 DFT 需要复数相乘次数为： $n^2 = 1,024 \times 1,024 = 2^{20} = 1,048,576$

1024(2^{10})点 FFT 需要复数相乘次数为： $(n/2) \log_2(n) = 512 \times 10 = 5,120$

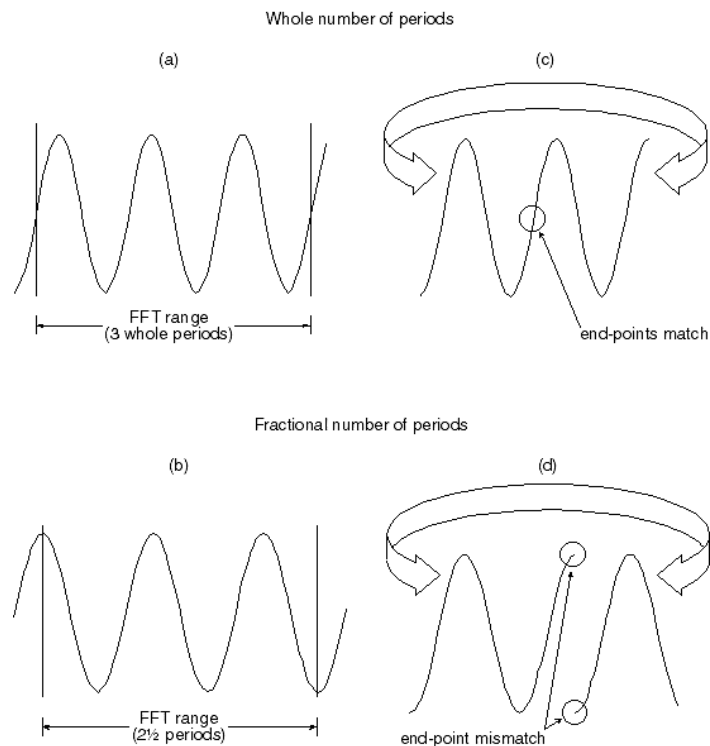
由此可见，对于 1024 点的变换，DFT 大约是 FFT 的 200 倍。

但是速度的提高是以牺牲多功能性为代价的。FFT 自动地对要计算的时间序列施加一些限制，以产生有意义的、准确的频率响应。以 2 为基底的 FFT 函数，要计算的时间范围或长度必须是包含 2 的 n 次方（例如 512、1024、2048 等）的数据点总数。因此，使用 FFT 只能计算包含 512 个点、1024 个点或 2048 个点等的固定长度的波形。例如，如果时间序列包含 1096 个数据点，只能计算其中的 1024 个点，因为 1024 是小于 1096 的最高的 2 的 n 次方。

由于这种 2 次方的限制，就带来了额外的问题。当采用 FFT 进行波形分析时，波形将被限定为包含 512 个点或 1024 个点等。其中一个边界在波形上建立一个起始点或参考点，该点在一定间隔后重复，从而定义了一个完整的波形周期。这个边界间可能是任意数量的波形周期，

也可能是部分波形周期，这就产生了问题。FFT 函数要求时间序列是一个对称的周期函数，换句话说，时间序列必须包含如图 2a 所示的整数个周期，以便生成准确的频率响应。显然，一个波形包含的点数为 2 的 n 次方，并以整周期结束的可能性很小，因此必须采取措施以确保频域分析的准确。在我们研究确保频域精度的方法之前，让我们更仔细地看一下整个/部分周期。

如果对包含了不完整周期的波形进行 FFT 计算，如图 2b 所示，会发生什么情况？



请见图 2-连续波形和不连续波形的示例，无需复杂的数学解释。

图(a)所示为一种很少见的理想情况，FFT 的正好包含一个完整周期，从波形的平均值开始。该波形具有端点连续性，如图 (c) 所示，这意味着生成的功率谱将是准确的，无需开窗。更典型的情况如图 (b) 所示，FFT 的范围不包含完整的周期数。如图 (d) 所示，该波形端点具有不连续性，这意味着生成的功率谱将包含输入中不存在的高频分量，因此需要开窗以便衰减不连续性，从而提高精度。

将要评估的波形想象为一个展开的环，将环的两端重新连接在一起，再次形成一个环，则由多个整周期组成的波形将完美地连接在一起，如图 2c 所示。然而，如图 2d 所示的情况，端点之间有间隙或重叠，则由非整数个周期组成的波形不会完美结合在一起。因此，FFT 将采用

端点误差评估该波形,并生成包含端点失配的虚假频率分量的功率谱,参考图 3 所示的频谱图。此图显示了两个相等振幅和频率的正弦波的功率谱。然而,右侧功率谱的峰值似乎有些“分散”。这种不准确性是由于对非整数周期的波形进行 FFT 计算所造成的。而功率谱的扩展或“泄露”效应是由于波形端点处不连续而人为造成的。

幸运的是,我们找到了一种解决方案,可以尽量减少泄漏造成的误差,同时确保频域的准确性。除了 DFT (离散傅里叶变换) 以外,唯一的解决方案是加窗函数。如图 5d 所示,大多数窗口加权函数(通常称为“窗口”)通过在窗口两端将信号逐渐减至零来衰减不连续性。但是,如果波形的重要信息出现在窗口的末端,它将被破坏。这种情况就必须寻求窗口以外的解决方案。使用开窗的方法,经 FFT 处理的周期性错误信号将在端点处平滑过渡,从而生成更精确的功率谱图。有多种窗函数,特性各异。通用的窗函数常常以发明者的名字命名,例如 Hamming, Bartlett, Hanning, Blackman。Hamming 窗(海明窗)为人们熟悉的钟形加权函数,但在窗的边缘不会将信号置零。海明窗的特点是能使旁瓣降低,但是主瓣变宽,生成非常好的谱峰值,但只是适当的减少频谱泄漏。Bartlett 窗(巴特利特窗)提供了一个三角形的加权函数,可将窗口边界的信号置零,生成一个非常好的、尖锐的频谱峰值,并且很好地减少频谱泄漏。汉宁窗提供了一个相似的钟形窗(如图 5d 所示),该窗的边界信号也为零。Hanning 窗(汉宁窗)有良好的频谱峰值清晰度(与 Bartlett 窗同样优秀),但汉宁窗提供了非常好的泄漏抑制(优于 Bartlett 窗)。Blackman 窗(布莱克曼窗)提供了与 Hanning 窗相似的加权函数,但形状更窄。由于形状较窄,Blackman 窗在抑制谱泄漏方面效果最好,但需要权衡的只是提高频谱峰值的清晰度。如图 4 所示,窗口功能的选择是一门艺术,选择哪种窗函数,取决于处理各种窗口约束间的权衡技巧,也取决于希望从功率谱或逆功率谱中得到什么。显然,提供一个可进行几种窗口选择的傅里叶分析软件包有助于消除 FFT 固有的频谱泄漏失真。

简而言之,FFT 是一种基于波形的 2 到 n 次方数据点部分生成功率谱的快速计算方法。这意味着功率谱中绘制的点的数量不一定像最初预期的那样多。FFT 还使用一个窗口来最小化由于端点不连续引起的功率谱失真。然而,如图 5d 所示,该窗口可能会减弱待评估时间序列边缘上出现的重要信息,并扭曲 IFT 操作(待定义)的结果。由于 FFT 这些固有的限制,您正在考虑选用的傅里叶分析软件包是否提供了 FFT 以外的解决方案?

另一种解决方案放弃窗口化,允许用户精确定义计算傅里叶变换的范围。这种方法消除了 2 到 n 次方的功率限制,称为 DFT。

利用 DFT 生成功率谱

如果需要比 FFT 的精度更高地转换一部分波形，或者当需要非加窗变换时，DFT 就是答案。例如，如果正在处理瞬态信号，则边缘包含的重要信息将会因为采用了应用窗口解决方案而发生不可接受的扭曲。在这种情况下，您别无选择，只能使用 DFT。如前所述，DFT 允许您调整要变换的波形范围的端点，从而消除窗口化的需要。这种方法允许评估包含任意数量点的波形，这比固定长度、 2 到 n 次方 FFT 更灵活。然而，为了避免产生与非加窗 FFT 相同的泄漏，必须从波形均值水平交点开始，取整个周期生成 DFT。换言之，计算 DFT 的波形范围必须为整个周期数，最好从波形与其平均值相交的点开始。

DFT 比 FFT 更加具有通用性和高精度。然而，通用性和高精度是以增加了算法的计算时间和端点定位时间为代价的。例如，表 1 比较了使用 DATAQ Instruments 的 WWB 傅里叶变换应用程序在相同波形上生成 FFT 和 DFT 所需的计算时间差异。显示的时间以秒为单位，是从一台基于 386 的、25MHz 的 PC 机上获得的，没有数学协处理器。由于 WWB 傅里叶变换算法使用整数算法，因此数学协处理器对提高性能几乎没有作用，因此此软件包不需要。有些软件包需要借助数学协处理器来运行，或者强烈推荐使用以获得最佳性能。请注意，DFT 计算时间仅比 FFT 计算时间慢约四倍。这是因为 WWB 实用程序使用非常类似于 FFT 的计算技术来计算 DFT。结果比 DFT 通常要求的标准 n^2 乘法数快得多。

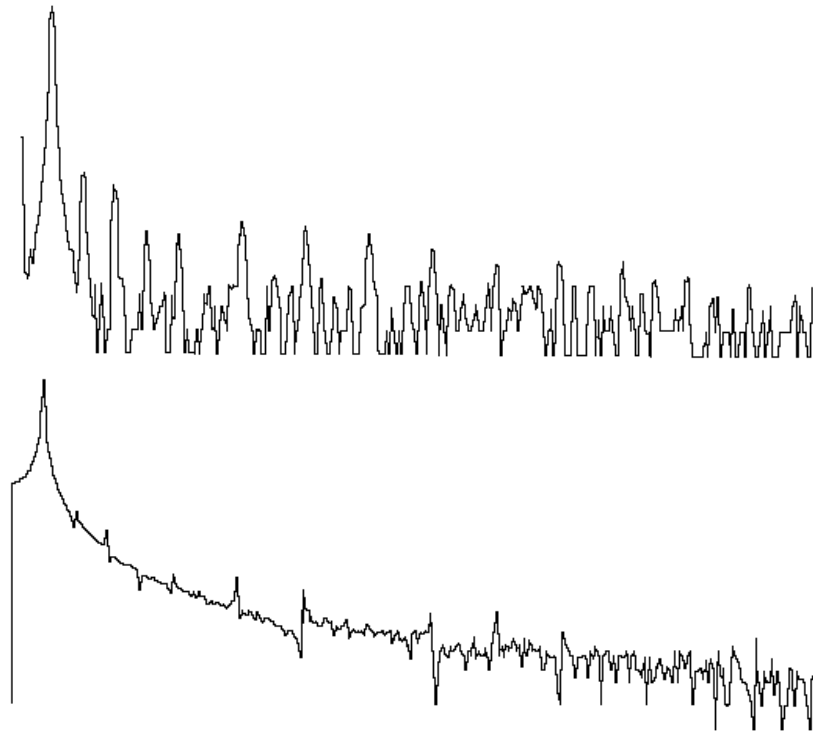


图 3

当对包含整数周期的波形部分执行 FFT 时，如图 3 上图中所，正弦波频谱在单一频率处达到峰值。如果对非整数个周期执行 FFT，则如图 3 下图所示，频谱会完全不同-宽峰值导致频率和振幅不精准。这些波形是由一个廉价的函数发生器产生的，它可以说明频谱中存在的噪声。

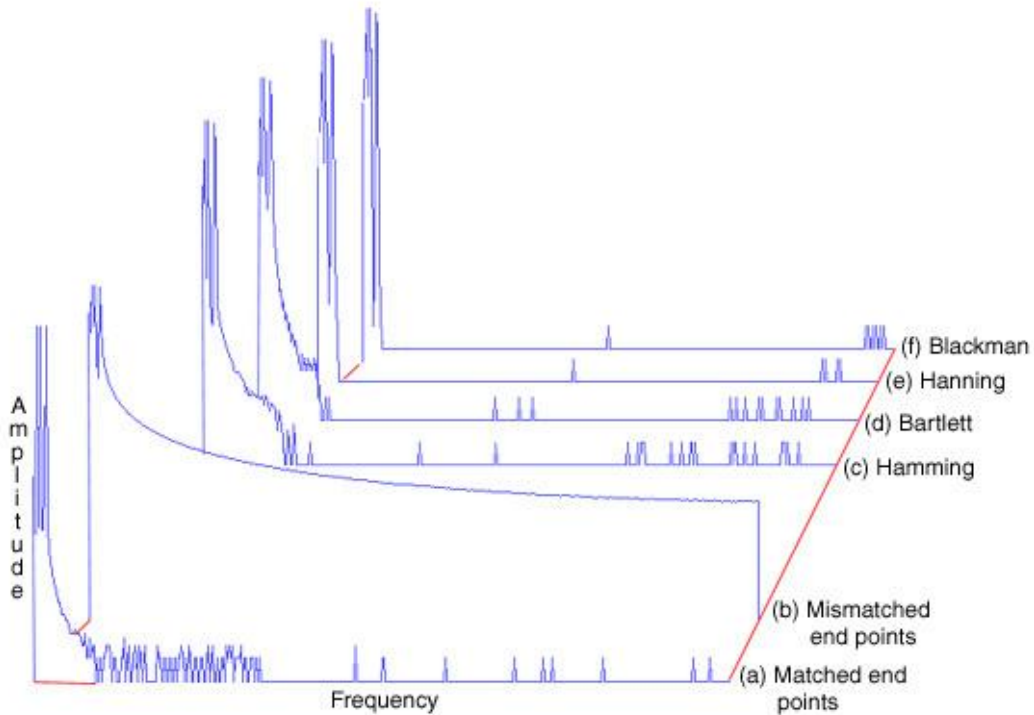


图 4

两个频率相近但幅值相差很大的正弦波的傅里叶变换很好地说明了窗口选择的重要性。(a) 显示为最佳情况，匹配的端点变换，原始波形的两个信号频率，一个是 2.2 Hz @90 dB，另一个是 10.9 Hz@46 dB。(b) 更为典型，仅显示具有不匹配端点的相同波形的变换。请注意，此图中甚至看不见第二个峰值。显然需要一个窗口。其余的变换曲线则显示了使用各种不同的窗口在抑制频谱泄漏和恢复丢失频率分量方面取得的不同效果，峰值锐度和副瓣衰减之间权衡的结果。(c) 为 Hamming 窗，请注意此窗口从不将信号置零。(d) 为 Bartlett 窗口，(e) 为 Hanning 窗，(f) 为 Blackman 窗口。由图可见，Blackman 窗口可以更好地显示弱项。

		Number of Points					
Transform Type	Transf	12	1024	2048	4096	8192	16384
	FFT	.3	.6	.9	1.4	2.6	7.3
	DFT	.3	.0	.3	.6	2.6	--

表 1-各种点变换的计算时间（秒）

应该提到的是，DFT 是在比所示数字少 1 的数据点范围内计算的，目的是为了确保软件生成 DFT。如果在 2 的 n 次方数量的数据点（例如 1024）上运行，则该软件足够“智能”以识别可以从该数量的数据点生成 FFT 或 DFT。由于 DFT 意味着更多不必要的计算，因此软件将采用最少计算的路径，从而产生 FFT。WinDaq 能够使用 FFT 转换最多 16384 个数据点，使用 DFT 转换最多 8191 个数据点。

利用 IFT 生成时间序列

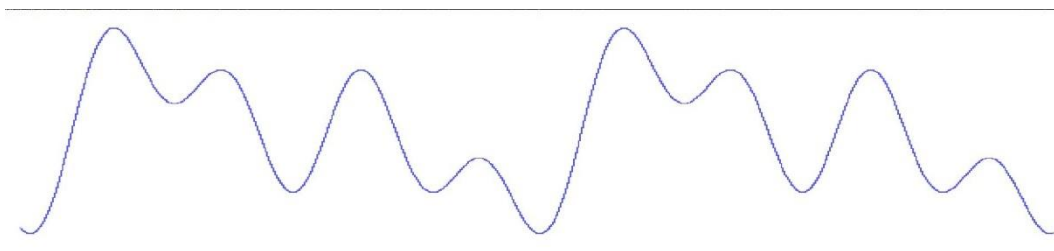
与其他双向变换（如直角坐标到极坐标）一样，傅里叶变换也适用于双向。如果功率谱（作为频率的函数）要“向后运行”，则原则上原始信号将作为时间的函数进行重构。这就是所谓的傅里叶逆变换（IFT）。如果这样做只是为了让你回到开始的地方，你可能就会质疑 IFT 的目的。IFT 的美妙之处在于它能够在频域中编辑功率谱，然后将您带回时域。此功能在功率谱滤波应用中非常有用。例如，在许多情况下，我们希望在没有任何“噪声”的情况下检查波形，从而使信号失真。这可以通过在执行 IFT 之前利用高通、低通、带通和陷波滤波器来实现。高通滤波器将滤除低于指定截止频率的低频信号分量，而低通滤波器将滤除高于指定截止频率的高频信号分量。带通滤波器是高通和低通滤波器的组合，用于隔离窄带信号。陷波滤波器用于去除某一指定频率点的信号分量。图 5 说明了在频域中可能进行的功率谱编辑类型。滤波操作可以是傅里叶分析软件包中的一项强大功能。

其他傅里叶分析软件问题

最好采用图形化软件包来进行傅里叶分析，该软件允许进行快速功率谱编辑。除了基本的 FFT、DFT 和 IFT 运算外，傅里叶分析软件包还可以通过附加的“bells and whistles”进一步提高价值。

支持波形傅里叶分析的软件包应该能够以工程单位或相对幅度(分贝)显示频率分量的强度，因为转换功率谱振幅单位非常耗时。

另一个问题是功率谱分辨率。除了速度，分辨率是 512 点变换和 16384 点变换之间唯一的区别。功率谱的范围始终从直流 (0 Hz) 到被变换波形采样率的一半，因此变换中的点数定义了功率谱分辨率 (512 点傅里叶变换的功率谱中有 256 点，1024 点傅里叶变换的功率谱中有 512 点，等等)。例如，如果您希望在复杂波形的功率谱中看到单独的 20 和 21 Hz 频率分量，512 点傅里叶变换可能无法清楚地显示这些单独的分量，因为其整个功率谱仅划分为 256 个等距点，并且所需频率非常接近。但是，如果变换包含更多的点，则可以将更多的点用于定义紧密间隔的频率分量。变换中的点数越多，频率分辨率越好。



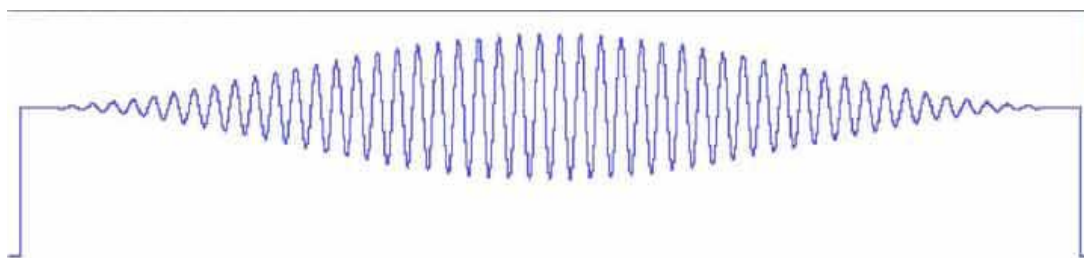
(a) Original Waveform



(b) Power Spectrum of (a)



(c) Filtered Power Spectrum



(d) IFT Result

在频域中进行编辑。(a)所示的波形为 20Hz 信号，其中包含不需要的 60Hz 噪声。使用 512 点 FFT 生成其功率谱，如 (b) 所示。在频域中，所有大于 40Hz（包括 60Hz 噪声）的不需要的频率分量都被删除，或通过应用如 (c) 所示的低通滤波器将其滤掉。然后从滤波后的功率谱中生成 IFT，从而得到 (d) 所示的纯 20Hz 波形。请注意波形的钟形外观。这是由于应用了汉宁窗，它解决了 FFT 固有的频谱泄漏难题。还要注意汉宁窗是如何在窗的边缘将信号衰减到零的。如果应用了 DFT，这种衰减将被消除，20Hz 信号将从一端到另一端以全振幅显示。

一个相关的问题是功率谱放大。所考虑中的软件应该能够在一屏上显示整个功率谱，而不用管变换中的点数多少。这会有助于发现频谱的总体趋势。对于放大，该软件还允许选择谱图的一部分，并使用多个放大系数更仔细地检查它。1024 × 768 的视频标准提供 1024 个水平分辨率的像素(像素)。如果执行 512 点傅里叶变换，由变换生成的 256 点非常适合 1024 像素宽的屏幕。1024 点变换也是如此，1024 像素宽的屏幕足以包含由变换生成的 512 点。当执行大于 2048 个点的转换时，问题就出现了。假设进行了 8192 点傅里叶变换，转换生成的 4096 个点比屏幕的 1024 像素宽得多。为了在一个屏幕宽度上获得整个功率谱，必须进行压缩(在此情

况下，压缩系数为 4)。然后必须使用放大镜以 8192 点变换的全分辨率检查光谱。此外，当应用了禁止在单个屏幕宽度上显示整个功率谱的放大系数时，该软件应允许一次平移一整屏的图。

另一方面需要考虑的是输出功能。是否可以将 FFT 图的坐标导出到 ASCII 文件？此功能允许重现频谱以供其他程序使用。

软件是否允许快速看到相同波形上每个窗口的结果？在试验不同类型的窗口和每个窗口提供的结果时，这可能是一项很方便并且可以节省时间的功能。

最后，软件包应能够进行功率谱平滑。这最好通过移动平均功能来实现。

移动平均功能是通过从频谱中提取两个或多个数据点，将它们相加的总和除以数据点总数，用计算出的平均值替换第一个数据点，并用第二个、第三个等数据点重复步骤，直到到达数据的末尾。这种简单的平均技术适用于衰减功率谱图中经常遇到的随机小振幅频率峰值。